جمهوری اسلامی ایران

اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

محل مهر آموزشگاه

ش صندلی (ش داوطلب) :	نام واحد آموزشی : دبیرستان هاتف	نوبت امتحانی : نیمسال اول	ساعت امتحان: ۸ صبح
نام و نام خانوادگی :	نام پدر : پایه : چهارم	رشته :ریاضی و فیزیک	وقت امتحان : ۱۰۰ دقیقه
سؤال امتحان درس : گسسته	نام دبیر: آقای پاکی	سال تحصیلی : ۹۳ - ۹۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۱۰/۱۱
			تعداد برگ سؤال: یک برگ

۱- تعداد گراف های ساده مرتبه ۵ که اندازه آن حداکثر برابر ۶ باشد را تعیین کنید. ۱٫۵

۲- در گراف ساده G تمام رئوس با هم مجاورند به طوری که رابطه $(p+2)q=\Delta^3-\delta$ برقرار است. مرتبه این گراف را تعیین کنید. ۱٫۵

۳- یک گراف از مرتبه ۹ و اندازه ۱۱ دارای یک رأس از درجه ۱ = δ و یک رأس از درجه ۴ =Δ است، تعداد رئوس درجه ۲ این گراف را تعیین کنید. ۱٫۵

۴- چند نوع گراف ساده هم بند G وجود دارد به طوری که G دارای یک رأس از درجه ۴ بوده و حاصلضرب مرتبه در اندازه آن برابر ۳۰ باشد. ۱٫۵

۵- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & a^2-3 & 1 & c+3 \\ b^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & 0 & 1 & d^2+c \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت یک گراف ساده باشد آنگاه حاصل عبارت $a+b+c-d^2$ را بدست آورید. ۱

۶- دنباله درجات رئوس یک درخت به صورت ۱، .... ، ۱ ، ۱ ، ۲، ۲ ، ۳ ، ۴ می باشد. این درخت چند مسیر به طول ۱ دارد؟ ۱٫۵

۷- قضیه: برای هر دو عدد صحیح a و b داریم: $[a,b](a,b)=|ab|$ ۱٫۵

۸- در یک تقسیم، مقسوم برابر ۱۰۰ و خارج قسمت برابر ۹ است. برای مقسوم علیه چند جواب طبیعی وجود دارد؟ ۱٫۵

۹- عدد A در مبنای ۴ به صورت $(\overline{ab32})$ و در مبنای ۸ به صورت $(\overline{13c})$ است.حاصل عبارت a+b+c را بدست آورید. ۱٫۵

پاسخ سؤالات در روی برگ سؤال نوشته شود، نیاز به پاسخنامه سفید ندارد. ☐ پاسخنامه سفید داده شود. ■

۱۰- قضیه: اگر $na \overset{m}{\equiv} nb$ و $(n,m)=d$ آنگاه $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$ ۱

۱۱- هرگاه r,q,p سه عدد اول متمایز بزرگتر از ۵ باشند، باقیمانده تقسیم عبارت A را بر ۱۲ بدست آورید. ۱/۵

$A = p^{q+1} + q^{r+1} + r^{p+1}$

۱۲- اگر $a \succ b$ و $[a,b]^2 + 4[a,b] = 20(a,b)$ آنگاه حاصل $a+b$ را بدست آورید. ۱/۵

۱۳- اگر عدد پنج رقمی $\overline{3a2b4}$ بر ۷۲ بخش پذیر باشد، ماکزیمم مقدار $a \times b$ را بدست آورید. ۱/۵

۱۴- باقی مانده تقسیم $2222^{5555} + 5555^{2222}$ بر ۷ را بدست آورید. ۱/۵

۲۰

راهنمای تصحیح درس : گسسته	نام واحد آموزشی : دبیرستان هاتف	ساعت امتحان: ۸ صبح
نوبت امتحانی : نیمسال اول	نام دبیر : آقای پاکی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۱۰/۱۱
رشته های : ریاضی و فیزیک	پایه : چهارم	تعداد برگ راهنمای تصحیح : دو برگ
سال تحصیلی : ۹۳-۱۳۹۲		

۱)

$p=5 \longrightarrow q_{Max}=\binom{5}{2}=10$

$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\dots+\binom{10}{6}=2^{10}-\left(\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right)$

$=1024-(120+45+10+1)=848$

۲)

$(p+2)q=\Delta^3-\delta \xrightarrow[q=\binom{p}{2}]{\Delta=\delta=p-1} (p+2)\binom{p}{2}=(p-1)^3-(p-1) \longrightarrow p=6$

۳)

$4,\underbrace{3,3,\dots,3}_{y \text{ مرتبه}},\underbrace{2,2,\dots,2}_{x \text{ مرتبه}},1$

$\rightarrow 1+2x+3y+4=2q=22$

$\rightarrow x+y+2=p=9$

$\begin{cases}2x+3y=17\\ x+y=7\end{cases} \longrightarrow x=4,\ y=3$

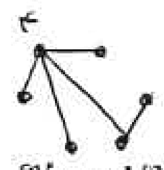
۴)

p	30	15	10	6	5	3	2	1
q	1	2	3	5	6	10	15	30

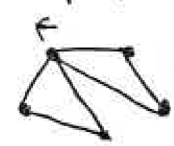
زیر ستون‌های $q=1, 2, 3$: گراف قطعاً ناهمبند

زیر ستون‌های $q=10, 15, 30$: گراف غیر ساده

$\begin{cases}p=6\\ q=5\end{cases}$



$\begin{cases}p=5\\ q=6\end{cases}$



۵) ماتریس مجاورت هر گراف ساده متقارن است و درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مجاورت همگی برابر صفرند.

$\begin{cases}b^2+1=a^2-3\\ \frac{a}{2}=c+3\\ d^2+c=0\end{cases}$

$\xrightarrow{b^2+1\geq 1} b^2+1=1 \longrightarrow b^2=0 \longrightarrow b=0$

$a^2-3=1 \longrightarrow a=\pm 2$

اگر $a=-2$ باشد آنگاه $\frac{a}{2}=-1$ که غیر قابل قبول است.

و در صورتی که $a=2$ آنگاه $\frac{a}{2}=1$ بنابراین: $c+3=1 \longrightarrow c=-2$

و چون $d^2+c=0$ پس $d^2=2$ بنابراین داریم: $a+b+c-d^2=2+0+(-2)-2=-2$

۶) اگر تعداد رئوس از درجه ۱ را x فرض کنیم، آنگاه داریم:

$p = x+3 \rightarrow q = x+2$

$4+3+2+x(1) = 2(x+2) \rightarrow 9+x = 2x+4 \rightarrow x=5 \rightarrow q=7$

۷) اثبات قضیه در کتاب موجود است.

۸) $100 = 9b + r \ , \ 0 \le r \le b-1$

$0 \le 100-9b \le b-1 \rightarrow \begin{cases} 100-9b \le b-1 \rightarrow b \ge 11 \\ 100-9b \ge 0 \rightarrow b \le 11 \end{cases} \rightarrow b=11$

فقط $b=11$ قابل قبول است.

۹) $(\overline{ab32})_4 = (\overline{13c})_8 \rightarrow 2+12+16b+64a = c+24+64$

$16b+64a = c+74 \rightarrow 16(b+4a) = c+74 \rightarrow 16 \mid c+74 \rightarrow c=6$

$c=22$ ، غ ق ق

$16(b+4a) = 80 \rightarrow b+4a = 5 \rightarrow a=1, b=1 \rightarrow a+b+c=8$

۱۰) اثبات قضیه در کتاب موجود است.

۱۱) $A = p^{q+1} + q^{r+1} + r^{p+1} = (6k\pm1)^{\text{زوج}} + (6k'\pm1)^{\text{زوج}} + (6k''\pm1)^{\text{زوج}}$

$= 24k_1+1 + 24k_2+1 + 24k_3+1$

$= 24(k_1+k_2+k_3)+3 = 12k'''+3 \rightarrow r=3$

۱۲) $m^2+4m = 20d \rightarrow a'^2 b'^2 d^2 + 4a'b'd = 20d \rightarrow a'b'(a'b'd+4) = 20$

چون $a'b'd+4 > 4$ $\begin{cases} a'b'=1 \rightarrow a'=b'=1 \\ a'b'd+4=20 \rightarrow d=16 \end{cases} \rightarrow a=b=16$ غ ق ق
چون $a > b$

$\begin{cases} a'b'=2 \rightarrow a'=2, b'=1 \\ a'b'd+4=10 \rightarrow d=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow a+b=9$ $\begin{cases} a'b'=4 \\ a'b'd+4=5 \rightarrow d=\frac{1}{4} \end{cases}$ غ ق ق

۱۳)

$$\overline{3a2b4} \overset{72}{\equiv} 0 \to \begin{cases} \overline{3a2b4} \overset{8}{\equiv} 0 \to \overline{2b4} \overset{8}{\equiv} 0 \to 200+10b+4 \overset{8}{\equiv} 0 \\ \overline{3a2b4} \overset{9}{\equiv} 0 \to 4+b+2+a+3 \overset{9}{\equiv} 0 \to a+b \overset{9}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$$\to 2b \overset{8}{\equiv} -4 \overset{8}{\equiv} 4 \to b \overset{4}{\equiv} 2 \to \begin{cases} b=2 \\ b=6 \end{cases}$$

$$\to a+b \overset{9}{\equiv} 0 \begin{cases} \xrightarrow{b=2} a \overset{9}{\equiv} -2 \overset{9}{\equiv} 7 \to a=7 \to a\times b=14 \\ \xrightarrow{b=6} a \overset{9}{\equiv} -6 \overset{9}{\equiv} 3 \to a=3 \to a\times b=18 \end{cases} \to \mathrm{Max}(ab)=18$$

۱۴)

$$2222^{5555}+5555^{2222} \overset{7}{\equiv} (2222-2)^{5555}+(5555-5)^{2222} \overset{7}{\equiv} 2220^{5555}+5550^{2222}$$

$$\overset{7}{\equiv} 3^{5555}+4^{2222} \overset{7}{\equiv} (3^3)^{1851}\times 3^2+(4^3)^{740}\times 4^2$$

$$\overset{7}{\equiv} (-1)^{1851}\times 9+1\times 16 \overset{7}{\equiv} 7 \overset{7}{\equiv} 0$$